

גיאומטריה אלגברית - תרגיל 4

אנחנו לא נאמרו ש- F שדה, אבל אנחנו יודעים ש- F הוא שדה.

שאלה 1. יהי $S \subseteq A^n$ קבוצת נקודות אלגברית. יהי $f, g: S \rightarrow A^1$ מורפזמים. ויהי $\alpha \in F$. הוכיחו כי $f+g$ ו- $f \cdot g$ הם מורפזמים מ- S ל- A^1 .

שאלה 2. (א) יהי $f \in F[x_1, \dots, x_n] \neq 0$. הוכיחו כי קיים $a \in F^n$ כך ש- $f(a) \neq 0$.
(הנחיה: אנחנו יודעים ש- $f = \sum_{i=0}^d f_i x_1^i$ עבור $f_0, \dots, f_d \in F[x_2, \dots, x_n]$.)

(ב) $\{a\}$ הוא אינדיקטור של $I(A^n)$ ו- $I(A^n)$.

(ג) $\{a\}$ הוא אינדיקטור של $I(\phi)$ ו- $F[\phi]$ (כאשר מוסיפים את ϕ בקבוצת האינדיקטורים).
(ד- A^n)

שאלה 3. יהיו $S \subseteq A^n$, $T \subseteq A^n$ קבוצות נקודות אלגבריות ויהי $f: S \rightarrow T$ מורפזם. (זכרו $F[S] \rightarrow F[T]$ מוגדרת על ידי $f^*(\phi) = \phi \circ f$).
הוכיחו כי f^* היא ההעתקה של F -אלגברות (אין צורך להוכיח ש- f^* מוגדרת היטב).

שאלה 4. יהי R חוג ממוסלף ויהיו I, J .

(א) נניח כי J רידיקל ו- $I \subseteq J$. הוכיחו כי $\sqrt{I} \subseteq J$.

(ב) הוכיחו כי I רידיקל $\iff R/I$ הוא חוג אלמנטרי (אין זכר בין הסעיפים).

שאלה 5. יהי M אידיאל מקסימלי של $F[x_1, \dots, x_n]$. בהיפotesה הוכחנו שיש $a_1, \dots, a_n \in F$ כך ש- $M = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$. הוכיחו כי $(a_1, \dots, a_n)$ (קבוצת האינדיקטורים) היא נקודת אינדיקטור של M .

שאלה 6. תנו דוגמה לאידיאל מקסימלי $M \subseteq R[x]$ כך ש- $\langle x-a \rangle \neq M$ לכל $a \in R$.